सम-सामयिक घटना चक्र प्रस्तुति

मन की गणित (Mind Math)

सहज एवं सरल ढंग से गणित सीखने की अद्भुत पुस्तक से उद्धृत

100 बाजीगर विधियां

समग्र अध्ययन के लिए अपने निकटतम् पुस्तक विक्रेता से पुस्तक मांगे।

अधिक जानकारी के लिए मिस्ड कॉल करें :–

803 063 6385

Daily Current Affairs | Govt. Jobs | SSC | Bank | Railway | IAS-PCS | GK | eBooks
तैयारी की पूरी जानकारी हिन्दी मे
SarkariHelp.com

संस्करण वर्ष- **2017**
ले.- **एस.के. चौधरी**
ISBN No.
978-93-86124-34-0
मूल्य : **390/-**
मुद्रक- अमर मुद्रणालय

संपर्क-
सम-सामयिक घटना चक्र
188A/128 एलनगंज, चर्चलेन
इलाहाबाद- 211002
Ph.: 0532-2465524, 2465525
Mob.: 9335140296
e-mail : ssgcald@yahoo.co.in
Website : ssgcp.com
e-shop Website : shop.ssgcp.com

संकलन सहयोग-
- **इंद्र बहादुर सिंह यादव**
- **पंकज कुमार राय**
- **राजेश शुक्ला**
- **रामकिशुन पटेल**
- **विक्की राज**

अनुक्रमणिका

अध्याय

समारंभ

'मन की गणित' शीर्षक मन में कुतुहल उत्पन्न करता है कि आखिर इस शीर्षक से हम बताना क्या चाहते हैं? दरअसल यह शीर्षक इस बात का प्रतीक है कि किसी समस्या या प्रश्न के लिए भिन्न-भिन्न लोगों के मन में भिन्न समाधान या उत्तर उत्पन्न होते हैं। यह बात और समझाने के लिए मैं यहां हास्य विद्या के सम्राट मुल्ला नसरुद्दीन के जीवन का एक किस्सा उल्लेख करना चाहूंगा-

दरबार में नसरुद्दीन के खिलाफ मुकदमा चल रहा था। दार्शनिक, तर्कशास्त्री और कानून के विद्वानों को नसरुद्दीन की जांच करने के लिए बुलाया गया था। मामला संगीन था क्योंकि नसरुद्दीन ने कबूल किया था कि वह गांव-गांव घूमकर कहता था कि तथाकथित ज्ञानी लोग अज्ञानी, अनिश्चयी एवं भ्रमित होते हैं।

सम्राट ने कहा 'पहले तुम बोलो।'

मुल्ला ने कहा, 'पहले कागज और कलम ले आओ।'

कागज और कलम मंगवाए गए।

'इनमें से सात लोगों को ये दे दो और उनसे कहो कि वे सब एक सवाल का जवाब लिखें, ''**रोटी क्या है?**'' उन सबने अपने-अपने कागज पर लिखा। वे कागज सम्राट को दिए गए और उसने उन्हें पढ़कर सुनाया-

पहले ने लिखा - रोटी एक भोजन है।

दूसरे ने लिखा - रोटी आटा और पानी है।

तीसरे ने लिखा - खुदा की भेंट है।

चौथे ने लिखा - सेंका हुआ आटा है।

पांचवें ने लिखा - रोटी रोजगार है।

छठें ने लिखा - एक पोषक तत्त्व है।

सातवें ने लिखा - कोई नहीं जानता कि रोटी क्या है।

नसरुद्दीन ने कहा, ''जब वे सब मिलकर रोज खाने वाली चीज रोटी पर एकमत नहीं हैं तो बाकी चीजों के बारे में निर्णय कैसे ले सकेंगे? जैसे- मैं सही हूं या गलत।

यह किस्सा मैंने यह बताने के लिए कहा है कि किसी भी चीज के बारे में भिन्न-भिन्न लोगों के भिन्न-भिन्न मत होते हैं। इसी प्रकार गणित के सवालों को हल करने के लिए भी लोगों की अपने-अपने **मन की गणित** होती है। यहां हमने अपने मन की गणित बताई है। यदि उपयोगी लगे तो इसे अपने मन की गणित बना लीजिए साथ ही अपने मन की और गणित बनाने में सन्नद्ध हो जाइए, तब तक, जब तक कि सुफल प्राप्त न हो जाए।

ऐसा भी नहीं है कि हमने सिर्फ अपने मन की ही गणित की चर्चा इस पुस्तक में की है। परंपरागत विधि, सूत्र विधि, विकल्प विधि, वस्तुनिष्ठ विधि एवं सामान्य समझ पर आधारित विधियों के अंतर्गत एक ही प्रश्न के हल हेतु प्रयुक्त भिन्न-भिन्न विधियों की चर्चा की गयी है। इनके मध्य तुलना करके उचित एवं अभीष्ट विधि छांट लेने में आपको वक्त नहीं लगेगा। यह पुस्तक चयन पर ऐसा ही विमर्श उपलब्ध कराती है।

खेल है, मन की गणित

अक्सर देखा गया है कि छात्र गणितीय प्रश्नों के प्रति अरुचि से भरे हुए और भयग्रस्त होते हैं। ऐसे ही लोगों के लिए **मन की गणित** विधि है, जिसमें वे परंपरागत प्रचलित विधि से हट कर अपने मन की विधि का प्रयोग करते हैं। मन की गणित के माध्यम से गणितीय प्रश्नों को हल करने हेतु वही आनंद प्राप्त हो सकता है जो एक बालक को किसी खेल को खेलने में प्राप्त होता है।

वस्तुतः गणितीय प्रश्नों से हम खेल रहे होते हैं और खेल-खेल में समस्या का समाधान खोजते हैं। इसमें गणितीय नियमों का कम तर्क-बुद्धि का अधिक प्रयोग होता है। इस विधि से प्रश्नों को हल करने में महारत हासिल करने के बाद हम गणितीय प्रश्नों को हल करने की अपनी क्षमता तो बढ़ाते ही हैं, साथ ही साथ अपने दैनंदिन (दैनिक) जीवन में आने वाली तमाम समस्याओं को हल करने के प्रति भी एक नयी समर्थ दृष्टि हासिल करने में सफल होते हैं।

मन की गणित विधि के लिए यह जरूरी नहीं है कि उपयोगकर्ता गणित विषय में बहुत पारंगत हो। यह प्रविधि उन परीक्षार्थियों के लिए भी समान रूप से आत्मसात किए जाने योग्य है जो केवल हाईस्कूल स्तर तक गणित विषय लेकर अध्ययनरत थे। गणित विषय की उच्च शिक्षा प्राप्त छात्रों को इस विधि में कोई अतिरिक्त लाभ नहीं मिलता है। कहने का आशय यह है कि **मन की गणित** विधि के उपयोग हेतु हाईस्कूल तक गणित का अध्ययन किए हुए छात्र एवं एम.एससी. (गणित) छात्र में कोई विशेष अंतर नहीं है। इसके लिए जरूरी यह है कि समस्याओं को देखने की एक तीक्ष्ण और आकर्षक दृष्टि हो। उदाहरण के लिए जब जॉर्ज बर्नार्ड शॉ से यह पूछा गया कि जमीन से आसमान तक जोड़ देने के लिए कितनी मछलियों की आवश्यकता होगी? तो जॉर्ज बर्नार्ड शॉ ने उत्तर दिया था एक ही मछली काफ़ी है, यदि वह इतनी लम्बी हो।

मन की गणित विधि एक खेल है, एक आनंद है लेकिन इसका मतलब यह नहीं है कि इसे बिना बुद्धि का इस्तेमाल किए आसानी से सीख लिया जाएगा। इस विधि को सीखने के लिए प्रतिबद्धता एवं दृढ़ता की जरूरत होगी। यह बहुत कुछ साइकिल सीखने की तरह है। जैसा कि आप जानते हैं कि, साइकिल सीखने के दौरान न जाने कितनी बार आप गिरे होंगे किंतु जब एक बार इसे सीख लिया तो फिर कभी नहीं भूलते हैं। साइकिल सीखने की ही तरह '**मन की गणित**' को भी सीखना है। आप सीखने के दौरान आनंद का अनुभव करते हैं और जब एक बार सीख जाते हैं तो खुद भी नहीं जानते कि कैसे सीख गए। जरा सोचिए दो पहिए पर पूरे संतुलन के साथ एक स्थान से दूसरे स्थान पर विचरना क्या किसी आश्चर्य से कम है किंतु आज के मानव के लिए यह सामान्य घटना है। मन की गणित जब एक बार आप सीख जाते हैं तो आप अपनी क्षमताओं से अपने आस-पास के लोगों को चमत्कृत कर देते हैं। आप एक जादूगर सरीखे दिखते हैं जो समस्याओं का समाधान चुटकियों में पलक झपकते करता है तो बात स्पष्ट है, 'मन की गणित' सीखना तथा उसका अभ्यास करना थोड़ा कठिन हो सकता है किंतु यह एक खेल की तरह है। एक बार जब आप इस खेल में महारत हासिल कर लेते हैं तो फिर इससे आप आनंद हासिल करते हैं।

ज्ञानी, विज्ञानी और बाजीगर

एक महान विचारक का कथन है कि जो जैसा सोचता है वैसा ही उसका व्यक्तित्व बनता है। किसी विचार के निरंतर थोपे जाने से भी व्यक्तित्व का निर्माण होता है। उदाहरण के लिए कक्षा अध्ययन के दौरान निरंतर परंपरागत प्रचलित विधियों से गणितीय प्रश्नों का हल करते-करते उसी प्रकार का माइंड सेट हो जाता है। जब हम प्रतियोगिता के क्षेत्र में प्रवेश करते हैं, तब ज्ञात होता है कि कक्षा-अध्ययन के दौरान अभ्यास की गयी युक्तियां काम नहीं आ रही हैं। यहीं शार्टकट मेथड इत्यादि विधियां व्यवहृत होती हैं।

मस्तिष्क से जब एक ही काम बार-बार लिया जाता है तो वह सीमाओं में बंध जाता है। उदाहरण के लिए, यदि हाथी के एक बच्चे को उसके आकार (Size) के अनुरूप जंजीर एवं खूंटे से बांध दिया जाए और निरंतर वह इस जंजीर एवं खूंटे से बंधा हुआ, एक सीमा में रहने की आदत डाल ले तो पूर्ण हाथी बनने के बाद भी वह उस खूंटे या जंजीर को तोड़ने या उखाड़ने की कोशिश नहीं करेगा क्योंकि वह उसी सीमा में रहने का अभ्यस्त हो चुका है जबकि पूर्ण हाथी बनने के बाद उसके अंदर इतनी शक्ति आ चुकी होती है कि वह किसी भी वक्त खूंटे को उखाड़ सकता है।

'मन की गणित' विधियों का प्रयोग करने के लिए ऐसे मेंटल ब्लॉक को तोड़ने की जरूरत होगी। यहां हम गणित के प्रश्नों को हल करने की भिन्न-भिन्न पद्धतियों को दर्शाने के लिए **तीन चरित्रों** का इस्तेमाल करेंगे। इनके माध्यम से हम दर्शाना चाहेंगे कि अंकगणित के किसी एक प्रश्न को परंपरागत विधि से हल करने की सीमाओं में व्यक्त करने वाला छात्र किस प्रकार हल करेगा और इसी प्रश्न को अन्य अनुसंधानिक सूक्ष्म विधियों से हल करने वाला छात्र कैसे हल करेगा तथा मन ही मन प्रश्न को हल करने वाला छात्र **'मन की गणित'** का प्रयोग करके प्रश्न को कैसे हल करेगा?

हमारे यह तीन चरित्र ज्ञानी, विज्ञानी और बाजीगर होंगे।

ज्ञानी—ज्ञानी वह है जो गणित की समस्याओं को परंपरागत प्रचलित तरीकों से हल करने के प्रति सतर्क रहता है। वह इस बात में विश्वास रखता है कि चरणबद्ध विधि (Step by Step Method) से ही प्रश्नों के सही उत्तर तक पहुंचा जा सकता है। वह कुर्सी पर सीधा पेन और अन्य गणितीय आवश्यकताओं को लेकर बैठता है। पेन और कागज उसके मुख्य अस्त्र हैं। वह परंपरागत भोजन तथा वस्त्रों को पसंद करता है और 'जल्दी जागो, जल्दी सोओ जैसे नैतिक सिद्धांतों में पूरी तरह विश्वास रखता है।

विज्ञानी—यह चरित्र गणित के प्रश्नों को हल करने में परंपरागत विधियों के साथ-साथ अन्य नए प्रयोग भी करता है। यह प्रयोग तब तक करता है, जब तक उसे विश्वास न हो जाए कि कौन सा तरीका उचित है। यह नवीनतम अनुसंधानों एवं प्रयोगों में विश्वास रखता है। यह भी पेन और कागज के साथ गणित के प्रश्नों को लेकर खेलता है। सामान्य किंतु आधुनिक व्यवस्थित वस्त्र-सज्जा पसंद करता है।

बाज़ीगर—यह परिणाम आधारित व्यक्ति है जिसे विधियों, तरीकों से कोई मतलब नहीं है। वह गणित के प्रश्नों को हल करने में उत्तर, विकल्प या किसी अन्य सोच के माध्यम से हल करने में विश्वास रखता है। गणितीय समस्या की गहराई में जाने के बाद वह परीक्षक के मस्तिष्क को पढ़कर यह जानने की कोशिश करता है कि वास्तव में क्या अपेक्षित है। उसका एकमात्र उद्देश्य यह होता है कि प्रश्नों को कम से कम संभव तरीकों द्वारा बिना पेन एवं कागज का इस्तेमाल किए कैसे हल किया जाए? उसकी जीवन-पद्धति बेतरतीब है, वस्त्रों की कोई स्टाइल नहीं है। वह जीन्स (Jeans) के साथ कुर्ता तथा टोपी पहन सकता है। रोटी एवं जैम जैसा विषम भोजन संयोजन अपने लिए उपयोगी मान सकता है। जब नींद लगती है सोता है, जब भूख लगती है खाता है और अपने को बाज़ीगर कहता है।

यहां हम एक उदाहरणार्थ प्रश्न यह दर्शाने के लिए प्रस्तुत कर रहे हैं कि ज्ञानी, विज्ञानी एवं बाज़ीगर चरित्र के छात्र इस प्रश्न को कैसे हल करेंगे?

प्रश्न- दो क्रमागत सम संख्याओं का योग 10 हो तो संख्याएं ज्ञात कीजिए।

(A) 2, 8 (B) 8, 2
(C) 5, 5 (D) 4, 6

ज्ञानी द्वारा हल—उपर्युक्त प्रश्न को विभिन्न चरित्र के छात्र विभिन्न तरीकों से हल करते हैं। जैसे–

माना पहली क्रमागत सम संख्या $= x$

तथा दूसरी क्रमागत सम संख्या $= x + 2$

प्रश्नानुसार,

$$x + x + 2 = 10$$

$$2x = 10 - 2$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

पहली सम संख्या $= 4$

दूसरी क्रमागत सम संख्या $= 4 + 2 = 6$

अतः संख्याएं 4, 6 होंगी।

विज्ञानी द्वारा हल—

$$x + x + 2 = 10$$

$$x = 4$$

अतः पहली सम संख्या 4 तथा दूसरी क्रमागत संख्या 6 होगी।

बाज़ीगर द्वारा हल—बाज़ीगर इस प्रश्न को देखते ही विचार करता है कि इन क्रमागत सम संख्याओं का योग 10 है। यदि हम इनका मध्यमान ज्ञात कर लें तो मध्य संख्या के ठीक पहले की सम संख्या तथा ठीक बाद की सम संख्या ही हमारा उत्तर होगा।

वह इस प्रकार सोचता है–

$$\text{मध्य संख्या} = \frac{\text{योग}}{2}$$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

अतः संख्याएं 4 तथा 6 होंगी।

प्रत्येक अध्याय में प्रश्नों की हल विधि दर्शाने के लिए

मन की गणित से उद्धृत 100 बाजीगर विधियां

1 जोड़ एवं घटाव

जोड़ एवं घटाव की जटिल गणनाओं को हम छोटे और आसान भागों में संख्याओं को तोड़कर हल कर सकते हैं। यहां ध्यान रखना होगा कि घटाव का अर्थ है धनात्मक संख्या से ऋणात्मक संख्या को हटाना। यह कार्य टुकड़ों में सुविधानुसार भी किया जा सकता है देखें कुछ प्रश्न–

$$\begin{array}{r} 945 \\ +96 \\ \hline \end{array}$$

यह गणना मन-मस्तिष्क में ही की जा सकती है यदि 945 में 100 जोड़कर उसमें से 4 घटा दिया जाए इस प्रकार-

$$\begin{array}{r} 945 \\ +100 \\ \hline 1045 \\ -4 \\ \hline 1041 \\ \hline \end{array}$$

ऐसा क्यों होता है? क्योंकि किसी संख्या में 100, 1000 इत्यादि जोड़ना सरल है और मन ही मन ऐसी गणनाएं संभव है। ऐसा ही एक प्रश्न और देखें -

$9832 + 1540 - 1142$

यहां ऋणात्मक 1142 को दोनों धनात्मक संख्याओं से हटाना है।

1540 में से 1140 हटा दें, शेष बचा = 400

शेष बचे 2 और ऋणात्मक संख्या को 9832 से हटा दें

शेष बचा = 9830

उत्तर = 9830 + 400 = 10230

इस प्रकार

$$\begin{array}{rcccr} & & 1142 & & \\ 9832 & - & \boxed{2} & = & 9830 \\ +1540 & - & \boxed{1140} & = & 400 \\ \hline & & & & 10230 \end{array}$$

इसी प्रकार

$$\begin{array}{rrrr} & 856 + 938 + 881 & & \\ = & 800 + & 50 + & 6 \\ + & 900 + & 30 + & 8 \\ + & 800 + & 80 + & 1 \\ \hline & 2500 + & 160 + & 15 = 2675 \\ \hline \end{array}$$

2 गुणा

गुणा की क्रियाओं को त्वरित हल करने के लिए अक्सर सुझाया जाता है कि टेबिल या पहाड़ा याद कर लें। अब यदि 6 में 197 से गुणा करना हो तो क्या 6 की टेबिल 197 बार तक याद रखेंगे? तब इनके लिए मन की गणित का इस्तेमाल कैसे करेंगे? सबसे पहले अपनी इस कमजोरी को स्वीकारें कि बड़ी संख्याओं के गुणा में हमें कठिनाई होती है और छोटी संख्याओं के गुणा जैसे $6 \times 4, 3 \times 5$ इत्यादि में हम सहज हैं। इसी प्रकार 10, 100 या 1000 से गुणा हम अत्यंत सरलता से कर लेते हैं क्योंकि इसमें करना ही क्या है? बस जीरो (0) आगे बढ़ा देना होता है। अपनी कमजोरी को ही ताकत में बदलकर हम गुणा के क्रियाओं को आसानी से हल कर सकते हैं, देखें-

$$6 \times 197 = 6 \times 200 - 6 \times 3 \quad (\therefore 197 = 200 - 3)$$

$$= 1200 - 18 = 1182$$

नोट : 6 का 197 गुना करना है। हमने पहले 6 का 200 गुना किया फिर उसमें से 6 का 3 गुना घटा दिया, हो गया 6 का 197 गुना।

इसी प्रकार

$$25 \times 44 = 25 \times 4 \times 11$$

$$= 100 \times 11 = 1100$$

नोट : एक संख्या को 4 गुना और दूसरी संख्या को चौथाई कर दिया जाए तो उत्तर पर कोई प्रभाव

नहीं पड़ेगा।

एक और प्रश्न देखें

$75 \times 84 = ?$

इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं-

$\underline{25 \times 3} \times \underline{21 \times 4}$

यदि एक हिस्से को एक गुना बढ़ा दें और दूसरे हिस्से को 1 गुना कम कर दें तो परिणाम पर कोई फर्क नहीं पड़ेगा लेकिन गणना सरल हो जाएगी; इस प्रकार

$$\underbrace{25 \times 4}_{100} \times \underbrace{21 \times 3}_{63} = 6300$$

यह आप पर है कि आप किस विधि को अपना साथी बनाते हैं। यह प्रश्न देखें-

46×48

इसके लिए हम आपको चार तरीके बताएंगे-

(1) **दोनों संख्याओं के औसत का वर्ग करके दोनों के अंतर का वर्ग घटाएं**

$$\frac{46+48}{2} = (47)$$

$$\frac{46-48}{2} = (-1)$$

$$= 47^2 - 1^2$$

(2) **बीजगणितीय विधि**

$46 = (47 - 1)$

$48 = (47 + 1)$

46×48

$(47 - 1) \times (47 + 1)$

$= (a - b) \times (a + b)$

$= a^2 - b^2$

$= 47^2 - 1^2$

(3) **सूत्र याद रखें**

$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

$(x - a)(x - b) = x^2 - ax - bx + ab$

46×48 को इन दोनों ही रूपों में रखा जा सकता है-

(A) $(x + a)$ एवं $(x + b)$ रूप यह है-

$$(40+6)(40+8) = 40^2 + 40 \times 6 + 40 \times 8 + 8 \times 6$$
$$= 1600 + 240 + 320 + 48$$
$$= 2208$$

(B) $(x - a)(x - b)$ रूप यह है-

$$(50-4)(50-2) = 50^2 - 50 \times 4 - 50 \times 2 + 4 \times 2$$
$$= 2500 - 200 - 100 + 8$$
$$= 2208$$

(4) **46 × 48 = ?**

46 का 50 गुना करें एवं उसमें से 2 गुना घटाएं-

46 का 50 गुना या 4600 का आधा = 2300

46 का 2 गुना = – 92

2208

⇒ उपर्युक्त उदाहरण में क्रमांक 3 में वर्णित तरीके का प्रयोग नजदीकी संख्याओं के परस्पर गुणा के लिए किया जाता है-

जैसे- $106 \times 109 =$

$$(100+6)(100+9) = 100^2 + 100 \times 6 + 100 \times 9 + 9 \times 6$$
$$= 10000 + 600 + 900 + 54$$
$$= 11554$$

⇒ गुना वाला तरीका सरल है और इसे कहीं भी अमल में ला सकते हैं। देखें-

$73 \times 82 =$

70 का 80 गुना = 5600

+ 3 का 80 गुना = 240

+ 70 का 2 गुना = 140

+ 3 का 2 गुना = 6

5986

सुविधानुसार एक स्टेप कम भी कर सकते हैं -

जैसे- $73 \times 82 =$

70 का 80 गुना = 5600

+ 3 का 80 गुना = 240

+ 73 का 2 गुना = 146

5986

3 भाग

गुणा की ही क्रिया की तरह भाग के लिए भी इस तथ्य को ध्यान में रखें कि छोटी संख्याओं से भाग बड़ी

संख्याओं से भाग की तुलना में आसान कार्य होता है। इसलिए भाग की गुणनखंड विधि का प्रयोग लाभदायक हो सकता है।

उदाहरण के लिए

$\frac{1344}{28}$ को इस प्रकार भाग दे सकते हैं-

$\frac{1344}{2}=672; \frac{672}{2}=336; \frac{336}{7}=48$ $\boxed{28 = 2 \times 2 \times 7}$

28 से भाग दिया गया किंतु इसके 3 गुणनखंडों $2 \times 2 \times 7$ से 3 बार में।

इसी प्रकार $\frac{324}{36}$ के लिए $36 = 2 \times 3 \times 3 \times 2$

$$\frac{324}{2} = 162; \quad \frac{162}{3} = 54; \quad \frac{54}{3} = 18; \quad \frac{18}{2} = 9$$

भाग की क्रिया करने के दौरान इस प्रकार से विचार भी महत्त्वपूर्ण साबित हो सकता है कि - 1344, 28 के 50 गुने 1400 से 28 का 2 गुना $(28 \times 2 = 56)$ कम है। अत: यह 28 का 48 गुना है। स्पष्ट है कि भागफल 48 होगा।

इसी प्रकार दूसरे प्रश्न में 324 संख्या के अवलोकन से स्पष्ट है कि यह 36 के 10 गुने से 36 का एक गुना अर्थात 36 कम है। अत: भागफल $10 - 1 = 9$ होगा।

4 भिन्नों की संक्रियाएं

● भिन्नों का जोड़-घटाव

भिन्नों के जोड़-घटाव के लिए एक बात समझ लेना है कि यदि हर बराबर कर लें तो अंशों को सामान्य जोड़-घटाव की तरह जोड़ते और घटाते हैं। भिन्नों को देखते ही इनके हरों को बराबर करने की युक्ति पर विचार करें। देखें प्रश्न:-

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$$

इसे लिख सकते हैं - $\frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{17}{20}$

इसे तिर्यक गुणा (Cross multiplication) विधि से भी समझ सकते हैं।

इस प्रकार $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$

अंश के लिए $\rightarrow 5 \times 1 + 4 \times 3 = 17$

हर के लिए $\rightarrow 4 \times 5 = 20$

भिन्न $= \frac{17}{20}$

इसी प्रकार- $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = ?$

तिर्यक गुणा विधि - $\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$

अंश के लिए $\rightarrow 4 \times 3 - 5 \times 1 = 7$

हर के लिए $\rightarrow 5 \times 4 = 20$

भिन्न $= \frac{7}{20}$

यहां भी हरों को बराबर करने के लिए 5 एवं 4 का गुणनफल 20 लिया गया। यही ल.स.प. भी है।

● भिन्न का गुणा

भिन्न के गुणा के लिए बस इतना करना है कि अंशों को परस्पर गुणा करके अंश प्राप्त करें एवं हरों को परस्पर गुणा करके हर प्राप्त करें। जैसे-

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$$

$\frac{4}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{9 \times 5} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$ (संक्षिप्त रूप में)

● भिन्नों का भाग

भिन्नों के भाग के लिए बस इतना कीजिए कि जिस भिन्न से भाग देना है उसे उलट दें अर्थात अंश की जगह हर एवं हर की जगह अंश फिर इसके बाद भिन्न के गुणा की क्रिया संपन्न करें। देखें-

$$\frac{3}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$$

5 वर्ग-वर्गमूल

● वर्ग कैसे जानें?

वर्ग संख्याएं जानने के लिए 2 सरल तथ्य ध्यान में रखें-

(1) 0 एवं 5 इकाई वाली संख्याओं का वर्ग करना अत्यधिक आसान है, और

(2) किसी संख्या के वर्ग में यदि वह संख्या और उसकी अगली संख्या जोड़ दें तो अगली संख्या का वर्ग प्राप्त होगा और यदि वह संख्या और पिछली संख्या घटा दें तो पिछली संख्या का वर्ग प्राप्त हो जाएगा। देखें-

(i) 10 एवं 20 का वर्ग

$$10 \times 10 = 100$$
$$20 \times 20 = 400$$

(संख्याओं को परस्पर गुणा करके उनके आगे उतने ही शून्य रख दें जितने इन संख्याओं में हैं)

(ii) 75, 85, 105 का वर्ग = ?

$75^2 = 5625$

$85^2 = 7225$

$105^2 = 11025$

इकाई का अंक 5 वाली संख्याओं का वर्ग ज्ञात करने हेतु सदा यह करें-

(i) 5 का वर्ग करके दाहिनी ओर रख दें ($5^2 = 25$)

(ii) इसके बगल में बायीं ओर शेष बची संख्या को उसकी अगली संख्या से गुणा करके रख दें।

जैसे- $(75)^2 \quad 7 \times 8 \quad 5^2 = 5625$

$$\underset{56}{\underbrace{7 \times 8}} \quad \underset{25}{\underbrace{5^2}}$$

(5 का वर्ग करके 25 रखा गया इसके ठीक पहले 7 में उसकी अगली संख्या 8 से गुणा करके 56 रखा गया)

$$(115)^2 = \overset{132}{\overbrace{(11 \times 12)}} \quad \overset{25}{\overbrace{(5 \times 5)}} = 13225$$

☞ यदि 10 का वर्ग 100 है तो 11 का वर्ग क्या होगा?

$100 + 10 + 11 = 121$

अर्थात 10 के वर्ग में 10 एवं उसकी अगली संख्या 11 जोड़ दें।

12 का वर्ग क्या होगा?

$121 + 11 + 12 = 144$

⇓

(11 का वर्ग)

☞ यदि 10 का वर्ग 100 है तो 9 का वर्ग क्या होगा?

$100 - 10 - 9 = 81$

अर्थात 10 के वर्ग में 10 एवं पिछली संख्या 9 घटा दें।

☞ 114 का वर्ग = ?

115 का वर्ग = 13225

114 का वर्ग $= 13225 - (115 + 114)$

$= 13225 - 229$

$= 13000 - 4 = 12996$

☞ 113 का वर्ग = ?

$(113)^2 = (115)^2 - (115 + 114 + 114 + 113)$

या

$= (115)^2 - (114 \times 4)$

$= 13225 - 456$

$= 12769$

नोट : 113 का वर्ग जानने के लिए 115 के वर्ग में 113 एवं 115 के बीच की संख्या का 4 गुना घटा दें।

कुछ उदाहरण देखें-

☞ 102 का वर्ग = ?

102 का वर्ग $= (100)^2 + (101 \times 4)$

$= 10000 + 404$

$= 10404$

☞ 103 का वर्ग = ?

103 का वर्ग $= (105)^2 - (104 \times 4)$

$= 11025 - 416$

$= 10609$

नोट : उपर्युक्त संक्षिप्त जानकारियों का प्रयोग कर बड़ी से बड़ी संख्या का वर्ग ज्ञात किया जा सकता है; आसानी से।

● **वर्गमूल**

दो दशमलव बिंदुओं तक वर्गमूल का अनुमान–

55 का वर्गमूल = ?

नियम-(1) 55 की नजदीकी संख्या का वर्गमूल जानें; यह है- 49 का वर्गमूल यानी 7

(2) 55 में से 49 घटाएं → $55 - 49 = 6$

(3) शेषफल को निकटतम वर्गमूल के 2 गुने से

भाग दें → $6 \div 7 \times 2 = \frac{6}{14} = .43$

(4) प्राप्त फल को निकटतम वर्गमूल संख्या में जोड़े → $7 + .43$

$= 7.43$

☞ 66 का वर्गमूल = ?

निकटतम वर्गमूल संख्या = $\sqrt{64} = 8$

$$\begin{array}{r} 66 \\ -\,64 \\ \hline 2 \end{array}$$

पुन: $\frac{2}{8 \times 2} = \frac{2}{16} = .13$

उपर्युक्त चर्चाओं का उद्देश्य आपको यह बताना है कि मानसिक स्तर पर ही हल करने की विधियों का प्रयोग करके सामान्य गणनाओं में लगने वाले समय को बचाया जा सकता है। विधि यदि सरल होगी तो इसमें शुद्धता भी होगी। सदैव सरल और छोटे प्रारूप एवं विधि को चुनें जिससे कागज एवं पेन के कम से कम इस्तेमाल से गणनाएं हो सकें और यह सही भी रहें। ऐसी सभी विधियों को बताया जाना संभव नहीं है। इन्हें आपको स्वयं अपनी सुविधा के अनुरूप '**अपनी मन की गणित**' विधि के रूप में निरंतर अभ्यास से विकसित करना है। ये परीक्षा भवन में कितनी कारगर होंगी, आप सोच भी नहीं सकते।

संख्या पद्धति

6 **प्रश्न :** दो क्रमागत सम संख्याओं का योग 14 हो, तो संख्याएं ज्ञात कीजिए?

हल : परंपरागत विधि

माना पहली सम संख्या = x

तथा दूसरी क्रमागत सम संख्या = y

प्रश्नानुसार, $x + y = 14$ ....(i)

y दूसरी क्रमागत सम संख्या है। इसलिए $y = x + 2$ होगा क्योंकि क्रमागत समसंख्याओं में उत्तरोत्तर (+2) की वृद्धि होती है।

y का मान समीकरण (i) में रखने पर

$x + x + 2 = 14 \Rightarrow 2x = 14 - 2 = 12$

$x = 6$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$6 + y = 14$

$y = 14 - 6 = 8$

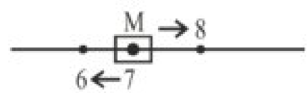
अत: सम संख्याएं 6 व 8 होंगी।

मध्यमान विधि

उपर्युक्त प्रश्न को समीकरण प्रारूप के बजाए एक अन्य अभिनव तरीके से भी हल किया जा सकता है-

यदि हम क्रमागत संख्याओं के योग का मध्यमान ज्ञात कर लें, तो मध्यमान संख्या के ठीक पहले की पूर्णांक संख्या पहली सम संख्या तथा ठीक बाद की पूर्णांक संख्या दूसरी क्रमागत सम संख्या होगी। क्रमागत सम संख्याओं का योग = 14

मध्य की संख्या $(M) = \frac{14}{2} = 7$



मध्य की संख्या 7 के ठीक पहले की सम संख्या = 6

मध्य की संख्या 7 के ठीक बाद की सम संख्या = 8

अत: संख्याएं 6, 8 होंगी।

इस अभिनव तरीके से परीक्षार्थी दी गई संख्याओं के योग का मध्यमान ज्ञात करके विभिन्न प्रकार (क्रमागत सम संख्याएं, विषम संख्याएं, तीन, चार, पांच आदि क्रमागत संख्याओं में छोटी संख्या, बड़ी संख्या एवं बीच की संख्या आदि) के प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

मध्यमान का नियम :

मध्यमान के नियम द्वारा उन संख्याओं को ज्ञात करना अत्यधिक सरल है, जिनका योग और संख्या दिया गया हो।

☞ **क्या करना होगा?**

योग को संख्याओं की संख्या से भाग दें, मध्यमान ज्ञात करें। अभीष्ट संख्याएं इसी मध्यमान संख्या के दोनों तरफ रहेंगी।

☞ **क्या ध्यान रखना होगा?**

देखना यह होगा कि मध्यमान के रूप में जो संख्या प्राप्त हुई है, वह यदि पूछी गई संख्या की संज्ञा (सम, विषम, प्राकृतिक इत्यादि) है, तो एक संख्या एक मध्यमान संख्या होगी और अन्य संख्याएं इसी संख्या के दोनों तरफ प्रसरित होंगी।

☞ **यदि मध्यमान अलग संख्या हो-**

यदि मध्यमान संख्या पूछी गई संख्या की संज्ञा से अलग है, तो मध्यमान संख्या के दोनों ओर निकटतम संख्या ज्ञात कर हम अपने वांछित परिणाम तक पहुंच सकते हैं।

7

प्रश्न : चार क्रमागत संख्याओं का योग 150 हो, तो संख्याएं ज्ञात कीजिए?

हल : मध्यमान $= \frac{150}{4} = 37.5$

(जो कि पूर्णांक नहीं है।)

अत: संख्याएं 36, 37, 38 व 39 होंगी। ⇒ **उत्तर**

8

प्रश्न : तीन क्रमागत विषम संख्याओं का योग 357 हो, तो संख्याएं ज्ञात कीजिए।

हल : तीन क्रमागत विषम संख्याओं का योग = 357

बीच की संख्या अर्थात मध्य की संख्या $= \frac{357}{3}$

$= 119$

अत: विषम संख्याएं = 117, 119, 121 ⇒ **उत्तर**

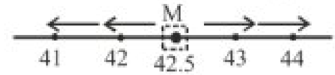
9

प्रश्न : चार क्रमागत संख्याओं का योग 170 हो, तो सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : चार क्रमागत संख्याओं का योग = 170

मध्य की संख्या $= \frac{170}{4} = 42.5$

(जो कि पूर्णांक नहीं है)



अत: चारो क्रमागत संख्याएं 41, 42, 43 व 44 होंगी।

⇒ **उत्तर**

10 प्राकृतिक संख्याओं के औसत एवं योग पर प्रश्न

प्रश्न : 1 से 100 तक की प्राकृतिक संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि से

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 99 + 100$

सूत्र : n प्राकृतिक संख्या का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

n प्राकृतिक संख्या का औसत

$= \frac{\text{n प्राकृतिक संख्या का योग}}{\text{कुल संख्या}}$

1 से 100 तक प्राकृतिक संख्याओं का योग

$= \frac{100\,(100 + 1)}{2} = 50 \times 101$

$= 5050$

औसत $= \frac{5050}{100} = 50.50$ ⇒ **उत्तर**

सूत्र विधि से

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 99 + 100$

सूत्र $S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)d]$

जहां n = पदों की संख्या, a= पहला पद,

S_n = n पदों का योग

d = सर्वांतर

यहां n = 100, a = 1 तथा d = 1 है।

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 99 + 100$

$$S_{100} = \frac{100}{2}\left[(2 \times 1 + (100 - 1)1\right]$$

$$= 50\,(2 + 99) = 50 \times 101 = 5050$$

$\therefore$ औसत $= \dfrac{5050}{100} = 50.50 \Rightarrow$ **उत्तर**

> **औसत विधि-**
>
> प्राय: देखा गया है कि इस प्रकार के प्रश्नों को हल करते समय परीक्षार्थी परीक्षा भवन में जूझते रहते हैं और विभिन्न प्रकार के नियमों व समीकरणों का प्रयोग करके हल करने का प्रयास करते हैं जिससे उनका काफी समय ऐसे प्रश्नों को हल करने के प्रयास में ही नष्ट हो जाता है। ऐसे प्रश्नों को एक निश्चित नियम का प्रयोग करके कम समय एवं सरलतम ढंग से हल किया जा सकता है।
>
> औसत के लिए $= \dfrac{\text{प्रथम संख्या + अंतिम संख्या}}{2}$
>
> योग के लिए = औसत × जितनी बार संख्या हो अर्थात जितनी संख्या हो-

औसत विधि से

औसत $= \dfrac{1 + 100}{2} = \dfrac{101}{2} = 50.5 \Rightarrow$ **उत्तर**

11

प्रश्न : 1 से 100 तक की प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

औसत विधि से

योग = औसत × संख्या

$= 50.5 \times 100$

$= 5050 \Rightarrow$ **उत्तर**

(1 से 100 तक की संख्याओं का औसत = 50.5 तथा 1 से 100 तक में कुल संख्या = 100)

12

प्रश्न : 1 से 100 तक की सम संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

औसत विधि से

1 से 100 तक में प्रथम सम संख्या = 2 तथा अंतिम सम संख्या = 100 होगी

औसत $= \dfrac{2 + 100}{2} = \dfrac{102}{2} = 51 \Rightarrow$ **उत्तर**

13

प्रश्न : 1 से 100 तक की विषम संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

औसत विधि से

1 से 100 तक में प्रथम विषम संख्या = 1 तथा अंतिम विषम संख्या = 99 होगी।

औसत $= \dfrac{1+99}{2} = \dfrac{100}{2} = 50 \Rightarrow$ **उत्तर**

14 संख्याओं के जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग पर आधारित प्रश्न

☞ **नोट :**

(1) यदि संख्याओं का योग तथा अंतर दिया गया हो, तब

बड़ी संख्या $= \dfrac{\text{योग + अंतर}}{2}$

छोटी संख्या $= \dfrac{\text{योग − अंतर}}{2}$

(2) संख्याओं का गुणनफल

$= \dfrac{(\text{योग + अंतर})(\text{योग − अंतर})}{4}$

= बड़ी संख्या × छोटी संख्या

(3) यदि संख्याओं के योग तथा अंतर का अनुपात $x : y$ हो, तो संख्याओं का अनुपात $= \dfrac{x+y}{x-y}$ होगा।

प्रश्न : दो संख्याओं का योग 8 है तथा उनका अंतर 4 है, तो बड़ी एवं तथा छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि

माना बड़ी संख्या x तथा छोटी संख्या y है, तो

प्रश्नानुसार, $x+y=8$ ......(1)

$x-y=4$ ......(2)

समीकरण (1) व समीकरण (2) को जोड़ने पर

$2x=12$

$x=6$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$6+y=8$

$y=8-6=2$

अत: बड़ी संख्या $=6$

तथा छोटी संख्या $=2 \Rightarrow$ **उत्तर**

सूत्र विधि-

(1) बड़ी संख्या =

$$\frac{\text{दोनों संख्याओं का योग} + \text{दोनों संख्याओं का अंतर}}{2}$$

(2) छोटी संख्या =

$$\frac{\text{दोनों संख्याओं का योग} - \text{दोनों संख्याओं का अंतर}}{2}$$

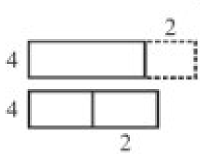
बड़ी संख्या $= \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$

तथा छोटी संख्या $= \frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$ **उत्तर**

मध्यमान विधि-

संख्याओं का मध्यमान $= \frac{\text{योग}}{2} = \frac{8}{2} = 4$

अंतर का मध्यमान $= \frac{4}{2} = 2$



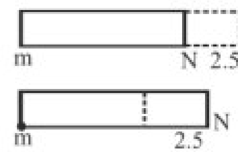
बड़ी संख्या $=4+2=6$

छोटी संख्या $=4-2=2$

15 **प्रश्न :** दो संख्याओं का अंतर 5 है, यदि बड़ी संख्या 23 हो तो छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : मध्यमान विधि-

अंतर का मध्यमान $= \frac{5}{2} = 2.5$



बड़ी संख्या $=23$

$M = 23 - 2.5 = 20.5$

छोटी संख्या$=20.5-2.5=18$

$\Rightarrow$ **उत्तर**

16 **प्रश्न :** दो संख्याओं का योग 5 तथा अंतर 3 हो, तो इनका गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि-

संख्याओं का गुणनफल

$$= \frac{(\text{योग} + \text{अंतर})\ (\text{योग} - \text{अंतर})}{4}$$

संख्याओं का योग $=5$ तथा अंतर $=3$ है।

संख्याओं का गुणनफल $= \frac{(5+3)\ (5-3)}{4}$

$= \frac{8 \times 2}{4} = 4 \Rightarrow$ **उत्तर**

17 **पैरों एवं सिरों की संख्या के आधार पर प्रश्न**

प्रश्न : मोहन के फार्म में मुर्गियों एवं सुअरों की कुल संख्या 37 है तथा उनके पैरों की संख्या 98 है, तो मोहन के फार्म में मुर्गियों एवं सुअरों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि

माना सुअरों की संख्या x है तथा मुर्गियों की संख्या y है, तो

प्रश्नानुसार, $x+y=37$

या $2x+2y=74$ ....(i)

सुअरों के पैरों की संख्या $=4x$

तथा मुर्गियों की पैरों की संख्या = 2y होगी।

प्रश्नानुसार, $4x + 2y = 98$ ......(ii)

समीकरण (i) व समीकरण (ii) को हल करने पर

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 74 \\ 4x + 2y &= 98 \\ \hline -2x &= -24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$y = \frac{50}{2} = 25$$

अत: सुअरों की संख्या = 12

तथा मुर्गियों की संख्या = 25 $\Rightarrow$ **उत्तर**

समीकरण विधि

यदि सुअरों की संख्या x एवं मुर्गियों की संख्या $(37 - x)$ हो, तो पैरों की संख्या = $4 \times x$ तथा $2 \times (37 - x)$ होगी।

प्रश्नानुसार, $4x + 74 - 2x = 98$

$$2x = 98 - 74 = 24$$

$$x = \frac{24}{2} = 12 \text{ (जो कि सुअरों की संख्या है)}$$

तथा $37 - x = 37 - 12 = 25$ (जो कि मुर्गियों की संख्या है)

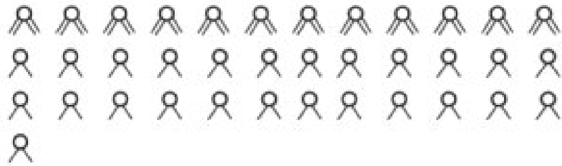
अत: सुअरों की संख्या = 12

तथा मुर्गियों की संख्या = 25 $\Rightarrow$ **उत्तर**

अभिनव कल्पना विधि

उपर्युक्त समीकरण की बजाय इस प्रश्न को एक अन्य अभिनव तरीके से भी हल किया जा सकता है-

प्रश्न के हल हेतु हम एक रेखाचित्र खींचते हैं। हम सभी 37 जानवरों के सिरों के लिए 37 गोले खींचे और पैरों के लिए सभी गोलों के नीचे 2 लाइनें खींचे। अब चार (4) पैरों वाले सुअर के लिए 2 अतिरिक्त लाइनें खींचना शुरू करें। कितने गोलों में 2 अतिरिक्त लाइनें खींचनी होगी? स्पष्ट है कि 37 गोलों में 2 लाइनों की दर से 74 लाइनें पैरों के लिए हो जाएगी किंतु 98 पैर पूर्ण करने के लिए कुल 24 पैर बनाने हेतु 12 गोले में 2-2 लाइनें और खींचनी होगी। यही 12 सुअरों की संख्या होगी और शेष 25 मुर्गियों की इस प्रकार -



इस तरह की समस्या को सरल शब्दों में इस प्रकार समझ सकते हैं। यदि सभी सुअर अर्थात चार पैर वाले जानवर 2 पैर पर खड़े हो जाएं, तो 37 जानवरों के कुल 74 पैर होंगे लेकिन पैर 74 नहीं बल्कि 98 हैं अर्थात 24 पैर ज्यादा। एक चार पैर वाला जानवर अर्थात सुअर अपने चारों पैर जमीन पर रख दे, तो पैरों की संख्या में 2 की वृद्धि होगी। सभी चार पैर वाले जानवर अर्थात सुअरों के पैरों के जमीन पर रख देने से 24 पैर बढ़ेंगे अर्थात सुअरों की संख्या = $\frac{24}{2}$

$= 12$

यदि सुअरों की संख्या 12 है, तो मुर्गियों की संख्या होगी = $37 - 12 = 25$

सरलीकरण

18 उदाहरणार्थ प्रश्न-

प्रश्न : $0.\overline{63} + 0.\overline{37} + 0.\overline{80} = ?$

हल : $0.\overline{63} + 0.\overline{37} + 0.\overline{80}$

$$= \frac{63}{99} + \frac{37}{99} + \frac{80}{99}$$

$$= \frac{63 + 37 + 80}{99} = \frac{180}{99}$$

$$= 1\frac{81}{99} = 1.\overline{81}$$

☞ **एक और उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-**

प्रश्न : $0.34\overline{67} + 0.13\overline{33} = ?$

हल : $0.34\overline{67} + 0.13\overline{33}$

$$= \frac{3467 - 34}{9900} + \frac{1333 - 13}{9900}$$

$$= \frac{3433}{9900} + \frac{1320}{9900}$$

$$= \frac{4753}{9900}$$

या $= \dfrac{4753 + 48 - 48}{9900}$

[अंश में संख्या 48 जोड़ा गया फिर घटाया गया]

$$= \frac{4801 - 48}{9900} = 0.48\overline{01}$$

19 **प्रश्न** : $[5 \times 3 + \{49 \div 7 \times 6 - (28 \div 7)\}]$ का सरलतम मान ज्ञात कीजिए।

हल : $[5 \times 3 + \{49 \div 7 \times 6 - (28 \div 7)\}]$

$$= [5 \times 3 + \{49 \div 7 \times 6 - 4\}]$$

[छोटा कोष्ठक $(28 \div 7 = 4)$ हल किया गया]

$$= \left[5 \times 3 + \left\{\frac{49}{7} \times 6 - 4\right\}\right]$$

[मझोला कोष्ठक में $49 \div 7$ को $\dfrac{49}{7}$ लिखा गया]

$$= [15 + \{7 \times 6 - 4\}]$$

[मझोला कोष्ठक में BODMAS नियम का प्रयोग करके हल किया गया]

$$= [15 + \{42 - 4\}]$$

$$= 15 + 38$$

$$= 53 \quad \Rightarrow \text{उत्तर}$$

20 **प्रश्न** : $\dfrac{5}{8 + \dfrac{6}{8 - \dfrac{10}{11}}}$ को सरल कीजिए।

हल : $\dfrac{5}{8 + \dfrac{6}{8 - \dfrac{10}{11}}} = \dfrac{5}{8 + \dfrac{6}{\dfrac{88 - 10}{11}}}$

$$= \frac{5}{8 + \dfrac{6}{\dfrac{78}{11}}}$$

$$= \frac{5}{8 + 6 \times \dfrac{11}{78}}$$

[इस प्रकार के प्रश्नों में सबसे नीचे दी गई संख्या से हल करना प्रारंभ करते हैं अर्थात् सबसे नीचे $8 - \dfrac{10}{11}$ है। अतः सबसे पहले इसे हल किया गया]

$$= \frac{5}{8 + \dfrac{11}{13}}$$

[अब $8 + \dfrac{11}{13}$ को पहले हल करेंगे]

$$= \frac{5}{\dfrac{8 \times 13 + 11}{13}}$$

$$= \frac{5}{\dfrac{104 + 11}{13}} = \frac{5}{\dfrac{115}{13}}$$

$\left[\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}} = a \times \dfrac{c}{b}$ के रूप में $\dfrac{5}{\dfrac{115}{13}}$ को लिखा गया$\right]$

$$= 5 \times \frac{13}{115} = \frac{13}{23} \Rightarrow \text{उत्तर}$$

21 **प्रश्न** : यदि $a + b + 1 = 0$ हो, तो $(a^3 + b^3 + 1 - 3ab)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $a + b + 1 = 0$

$a + b = -1$ ....(1)

अब दोनों पक्षों का घन करने पर

$(a+b)^3 = (-1)^3$

$a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b) = -1$

$a^3 + b^3 + 3ab\,(-1) = -1$

[समीकरण (1) से $a + b = -1$ रखने पर]

$a^3 + b^3 - 3ab = -1$

$a^3 + b^3 + 1 - 3ab = 0$

[पक्षांतर किया गया]

अतः $a^3 + b^3 + 1 - 3ab = 0$ होगा। ⇒ **उत्तर**

महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य

22 **महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य में संबंध**

दो संख्याओं और उनके म.स. तथा ल.स. में संबंध बहुत ही महत्त्वपूर्ण है। प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे जाने वाले प्रश्नों की दृष्टि से इस संबंध की जानकारी अत्यधिक उपयोगी है, जो इस प्रकार है–

पहली संख्या × दूसरी संख्या = म.स. × ल. स.

उपर्युक्त सूत्र का विस्तार इस प्रकार है–

मान लीजिए दो संख्याएं क्रमशः 24 व 36 हैं

(i) 24 एवं 36 का म.स.

$24 = \underline{1 \times 2 \times 2} \times 2 \times \underline{3}$

$36 = \underline{1 \times 2 \times 2} \times 3 \times \underline{3}$

इनका म.स. = 1 × 2 × 2 × 3 [क्योंकि ये ही दोनों गुणनखंड समूहों में (Common Factors) = 12 उभयनिष्ठ हैं।]

(ii) 24 एवं 36 का ल.स.

$24 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$36 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

इनका ल.स. = 1 × 2 × 2 × 3 × 2 × 3 = 72

(ल.स. में म.स. के गुणनखंडों के अतिरिक्त दोनों संख्याओं के सभी गुणनखंड शामिल होते हैं)

सूत्र है–

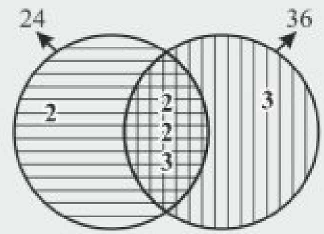
पहली संख्या × दूसरी संख्या = म.स. × ल. स.

24 × 36 = 12 × 72

864 = 864

अतः पहली संख्या × दूसरी संख्या = म.स. × ल. स.

HINT



म.स. = दोनों में उभयनिष्ठ संख्याओं का गुणनफल
= 2 × 2 × 3 = 12

ल.स. = उभयनिष्ठ का गुणनफल × शेष संख्याओं के गुणनफल
= (2 × 2 × 3) × (2 × 3) = 12 × 6 = 72

नोट : अतः दोनों संख्याओं के गुणनफल का मान इनके म.स. एवं ल.स. के गुणनफल के बराबर होगा।

23 **प्रश्न :** भिन्न $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}$ का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल : भिन्न का ल.स. = $\frac{\text{अंशों का ल.स.}}{\text{हरों का म.स.}}$

अंशों का ल.स. अर्थात 2, 3, 4 का ल.स. ज्ञात करना है।

2	2, 3, 4
2	1, 3, 2
3	1, 3, 1
	1, 1, 1

ल.स. = 2 × 2 × 3 = 12

हरों का म.स. अर्थात 5, 8, 9 का म.स. ज्ञात करना है।

$5 = \underline{1} \times 5$

$8 = \underline{1} \times 2 \times 2 \times 2$

$9 = \underline{1} \times 3 \times 3$

म.स. = 1 **(क्योंकि ये ही Common Factors है)**

अतः दी गई भिन्नों का ल.स. = $\frac{\text{अंशों का ल.स.}}{\text{हरों का म.स.}}$

$= \frac{12}{1} = 12$ ⇒ **उत्तर**

तैयारी की पूरी जानकारी हिन्दी मे SarkariHelp.com